

Φροντιστήριο 2 – Σκελετοί Λύσεων

Λύση Άσκησης 1

- a. Αν κάποιο κουμπί κλήσης του ανελκυστήρα πατηθεί στον τρίτο όροφο, τότε ο ανελκυστήρας θα μεταβεί στον όροφο αυτό.

$$\mathbf{G} (\textit{pressup}_3 \vee \textit{pressdown}_3 \rightarrow \mathbf{F} \textit{at}_3)$$

- b. Ο ανελκυστήρας δεν βρίσκεται ποτέ ταυτόχρονα στον πρώτο και τον δεύτερο όροφο.

$$\mathbf{G} (\neg (\textit{at}_1 \wedge \textit{at}_2))$$

- c. Αν ο ανελκυστήρας δεν βρίσκεται σε κίνηση, τότε η πόρτα του είναι ανοικτή.

$$\mathbf{G} (\textit{stop} \rightarrow \textit{open})$$

- d. Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σταματημένος στον τέταρτο όροφο θα παραμείνει εκεί μέχρι να πατηθεί κάποιο κουμπί.

$$\begin{aligned} &\mathbf{G} [(\textit{at}_4 \wedge \textit{stop}) \\ &\rightarrow \\ & ((\textit{at}_4 \wedge \textit{stop}) \mathbf{U} ((\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{press_up}_i) \vee (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{press_down}_i) \vee (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{press}_i)))] \end{aligned}$$

- e. Αν ο ανελκυστήρας εγκλωβιστεί ανάμεσα σε δύο ορόφους, τότε θα σημάνει συναγερμός μέχρι ο ανελκυστήρας να κινηθεί ξανά.

$$\mathbf{G} [((\forall_{1 \leq i < n} \textit{between}_i) \wedge \textit{stop}) \rightarrow (\textit{alarm} \mathbf{U} (\textit{go_up} \vee \textit{go_down}))]$$

Λύση Άσκησης 2

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathbf{F} \gamma$ | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |
| 2. $\mathbf{G} \gamma$ | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση. |
| 3. $\mathbf{G} \mathbf{F} \gamma$ | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |
| 4. $\mathbf{F} g$ | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1 και 3. |
| 5. $\mathbf{G} g$ | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση. |
| 6. $\mathbf{G} \neg b$ | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση. |
| 7. $b \mathbf{U} \neg b$ | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |
| 8. $\neg b \mathbf{U} \mathbf{F} b$ | Ικανοποιείται στην κατάσταση 4. |
| 9. $g \mathbf{U} (\gamma \mathbf{U} r)$ | Ικανοποιείται στην κατάσταση 1. |
| 10. $g \mathbf{U} \neg \gamma$ | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 3, και 4. |
| 11. $\mathbf{G} (g \mathbf{U} (\gamma \wedge \mathbf{F} b \wedge \mathbf{F} r))$ | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση. |
| 12. $\mathbf{G} (g \rightarrow \mathbf{X} \gamma)$ | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |

Λύση Άσκησης 3

1. $G p \Leftrightarrow \neg F \neg p$

Αληθές από τον ορισμό του τελεστή **G**.

2. $X F p \Leftrightarrow F X p$

Έστω μονοπάτι s . Τότε

$s \models X F p$	αν και μόνο αν αν και μόνο αν αν και μόνο αν	$s^1 \models F p$ $s^1 \models \text{true } U p$ υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$ και για κάθε $1 \leq k < j$, $s^k \models \text{true}$ υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$
και		
$s \models F X p$	αν και μόνο αν αν και μόνο αν αν και μόνο αν αν και μόνο αν αν και μόνο αν αν και μόνο αν	$s \models \text{true } U X p$ υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models X p$ και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models \text{true}$ υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models X p$ υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $(s^j)^1 \models p$ υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^{j+1} \models p$ υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

3. $(F G p) \wedge (F G q) \Leftrightarrow F (G p \wedge G q)$

Έστω μονοπάτι s . Τότε

$s \models (F G p) \wedge (F G q)$	αν και μόνο αν αν και μόνο αν αν και μόνο αν	$s \models F G p$ και $s \models F G q$ υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^i \models G p$ και υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models G q$ υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq 0$ $s^{i+k} \models p$ και υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq 0$ $s^{j+k} \models q$
	αν και μόνο αν	υπάρχει $n \geq 0$ ($n = \max(i,j)$) τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq 0$ $s^{n+k} \models p$ και για κάθε $k \geq 0$ $s^{n+k} \models q$
	αν και μόνο αν	υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^n \models G p$ και $s^n \models G q$
	αν και μόνο αν αν και μόνο αν	υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^i \models G p \wedge G q$ $s \models F (G p \wedge G q)$

Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

4. $(p \cup q) \cup q \Leftrightarrow p \cup q$

Θα θεωρήσουμε τις δύο κατευθύνσεις ξεχωριστά.

Έστω μονοπάτι s , τέτοιο ώστε, $s \models (p \cup q) \cup q$. Τότε έχουμε,
 υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models (p \cup q)$.

Έστω i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $s^i \models q$. Τότε
 $s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq k < i$, $s^k \models (p \cup q)$,

δηλαδή,

$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq k < i$, υπάρχει $m \geq k$ τέτοιο ώστε $s^m \models q$ (*)
 και για κάθε $0 \leq n < m$ $s^n \models p$.

Αφού το i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $s^i \models q$, από το (*) συμπεραίνουμε
 $s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq n < i$, $s^n \models p$

Επομένως,

$s \models p \cup q$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο μονοπάτι s ισχύει ότι $s \models p \cup q$. Τότε έχουμε:

υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$.

Επιπλέον ισχύει ότι

υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, ($\exists m = j$ τέτοιο ώστε $s^m \models q$ και
 για κάθε $k \leq n < m$, $s^n \models p$).

Συνεπώς

υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models p \cup q$

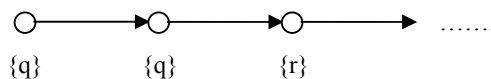
που συνεπάγεται ότι

$s \models (p \cup q) \cup q$

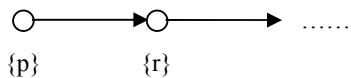
και το ζητούμενο έπεται.

5. $(p \cup q) \wedge (q \cup r) \equiv (p \cup r)$

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς καμιά κατεύθυνση. Η πιο κάτω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα $(p \cup q) \wedge (q \cup r)$ αλλά όχι την $(p \cup r)$.

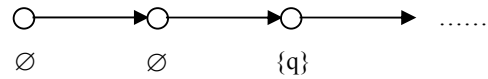


Η πιο κάτω δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $(p \cup q) \wedge (q \cup r)$ αλλά ικανοποιεί την $(p \cup r)$



6. $\mathbf{G} p \vee \mathbf{F} q \equiv (\mathbf{G} p) \vee (p \cup q)$

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς την κατεύθυνση \Rightarrow , όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Η ισοδυναμία ισχύει προς την κατεύθυνση \Leftarrow . Απόδειξη:

Έστω μονοπάτι s . Τότε

Αν $s \models (\mathbf{G} p) \vee (p \mathbf{U} q)$ τότε $s \models \mathbf{G} p$ ή $s \models (p \mathbf{U} q)$
 τότε $s \models \mathbf{G} p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$
 και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$
 τότε $s \models \mathbf{G} p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$
 τότε $s \models \mathbf{G} p$ ή υπάρχει $s \models \mathbf{F} q$
 τότε $s \models \mathbf{G} p \vee \mathbf{F} q$

Επομένως το ζητούμενο έπεται.