

Σειρά Προβλημάτων 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/02/18

Άσκηση 1

Έστω αλφάβητο Σ και γλώσσες L_1, L_2 επί του αλφάβητου αυτού. Να διερευνήσετε κατά πόσο ισχύει κάθε μια από τις πιο κάτω σχέσεις. Σε περίπτωση που μια σχέση ισχύει να το αποδείξετε, διαφορετικά να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν $L_1 \subseteq L_2$ τότε $L_1^* \subseteq L_2^*$

(β) $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

(γ) $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$

Άσκηση 2

Θεωρήστε τις λέξεις a_n και b_n επί του αλφαβήτου $\{0,1\}$, $n \geq 0$, οι οποίες παράγονται από τους πιο κάτω κανόνες:

$$a_0 = 0$$

$$b_0 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} b_{n-1}$$

$$b_n = b_{n-1} a_{n-1}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $|a_n| = |b_n| = 2^n$, για κάθε $n \geq 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $n \geq 0$, η λέξη b_n λαμβάνεται από τη λέξη a_n αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του 0 με 1 και αντίστροφα.

Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα πιο κάτω πεπερασμένα αυτόματα να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω του σχετικού συστήματος μεταβάσεων και να υπολογίσετε τη γλώσσα που αναγνωρίζει:

(α) Αυτόματο $A_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, όπου

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \{q_1\}$
- δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

δ	a	b
q_1	q_2	q_3
q_2	q_2	q_2
q_3	q_1	q_4
q_4	q_3	q_2

(β) Αυτόματο $A_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, όπου

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $F = \{q_5\}$
- δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_4
q_3	q_3	q_5
q_4	q_5	q_4
q_5	q_5	q_5

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες είναι κανονικές παρουσιάζοντας για κάθε μια από αυτές **ντετερμινιστικό** πεπερασμένο αυτόματο (**DFA**) που να την αναγνωρίζει. Σε κάθε περίπτωση, να δείχνετε (1) τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και (2) το διάγραμμα καταστάσεων.

(α) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \eta \ w \ \text{δεν περιέχει δύο συνεχόμενες εμφανίσεις του } a \}$

(β) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \eta \ w \ \text{δεν περιέχει } a \ \text{στην πρώτη θέση, δεν περιέχει } b \ \text{στη δεύτερη θέση και δεν περιέχει } a \ \text{στην τρίτη θέση.}\}$

(γ) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \eta \ w \ \text{περιέχει τη λέξη } aa \ \text{το πολύ μια φορά και την λέξη } bb \ \text{ακριβώς μία φορά}\}$

(δ) $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \bmod 3 = 2 \ \text{και} \ |w|_b \bmod 4 = 3 \}$

Σημείωση: Για λέξη w και σύμβολο a γράφουμε $|w|_a$ για τον αριθμό των εμφανίσεων του a στη w . Για παράδειγμα $|abbaabb|_a = 3$ και $|bbbb|_a = 0$.

Άσκηση 5

Έστω κανονική γλώσσα L επί κάποιου αλφάβητου Σ . Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα είναι επίσης κανονική.

$$\text{Πρόθημα}(L) = \{w \mid wx \in L, x \in \Sigma^*\}$$