Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Πληροφορικής
ΕΠΛ211: Θεωρία Υπολογισμού
Καθηγητής Μ. Μαυρονικόλας

Φυλλάδιο 6
13 Οκτωβρίου 1994

4η σειρά ασκήσεων

Παράδοση: Παρασκευή 21 Οκτωμβρίου, 1994.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Κατασκευάστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα που παράγουν κάθε μια από τις παρακάτω γλώσσες:

[α] $\{ w \in \{a,b\}^* : \#_b(w) = 2\,\#_a(w) \}$.

[β] $\{ w \in \{a,b,(,), \cup, *, \emptyset\}^*$: w είναι μια κανονική έκφραση για το αλφάβητο $\{a,b\}\}$.

[γ] $\{ a^m b^n : n \leq m \leq 2n \}$

[δ] $\{ a^m b^n c^p d^q : m + n = p + q \}$

Για κάθε περίπτωση, δείξτε προσεκτικά ότι η γλώσσα που παράγει η γραμματική σας είναι ακριβώς ίση με την αντίστοιχη γλώσσα.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Κατασκευάστε αυτόματα με στοίβα που να δέχονται τις παρακάτω γλώσσες:

[α] $\{ a^m b^n : m \leq n \leq 2m \}$

[β] $\{ w \in \{a,b\}^* : w = w^R \}$

Αποδείξτε την ορθότητα των κατασκευών σας.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποιές από τις παρακάτω γλώσσες είναι χωρίς συμφραζόμενα; Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

[α] $\{ a^m b^n c^p : m = n$ ή $n = p$ ή $m = p \}$

[β] $\{ a^m b^n c^p : m = n \text{ ή } n \neq p \text{ ή } m \neq p \}$

[γ] $\{ a^m b^n c^p : m = n \text{ και } n = p \text{ και } m = p \}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G ονομάζεται διφορούμενη αν υπάρχει μία συμβολοσειρά w G με δύο διαφορετικές αριστερότερες παραγωτές στη G.

[α] Δείξτε ότι η γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G = (V,Σ,R,S), όπου V = {a,b,S,A},Σ = {a,b},R = {S --> AA, A --> AAA, A --> a, A --> bA, A --> Ab} του Παραδείγματος 3.1.4 (βλέπε επισυναπτόμενο) είναι διφορούμενη, εφόσον η συμβολοσειρά aba έχει δύο διαφορετικές αριστερότερες παραγωγές στη G.

[β] Μια γλώσσα L ονομάζεται εγγενώς διφορούμενη, αν όλες οι γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα G για τις οποίες L(G) = L είναι διφορούμενες. Δείξτε ότι η L(G), όπου G είναι η γραμματική χωρίς συμφραζόμενα του μέρους (α), δεν είναι εγγενώς διφορούμενη.

[γ] Δείξτε ότι αν η L είναι μια κανονική γλώσσα, τότε η L δεν είναι εγγενώς διφορούμενη.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η παρακάτω γραμματική, παρόλο που δεν είναι κανονική, παράγει μια κανονική γλώσσα:

({ S,A,B,a,b}, {a,b}, {S --> AabB, A --> aA, A-->bA, A --> e, B --> Bab, B --> Bb, B --> ab, B --> b}, S }.

Βρείτε μια κανονική έκφραση που παριστά τη γλώσσα, ένα μή ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που δέχεται τη γλώσσα και μια κανονική γραμματική που την παράγει.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα για να δείξετε ότι κάθε μια από τις παρακάτω γλώσσες δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα:

[α] $\{ w \; \{a,b\}^* : \#_b(w) = (\#_a(w))^2 \}$.

[β] $\{ a^i b^{2i} a^i : i \geqslant 0 \}$.

ΕΠΛ 211

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΣΕΙΡΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

[a] $L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* : \#_b(w) = 2\#_a(w) \}$

$$G_1 = (\{S, A, B, a, b\}, \{a, b\},$$
$$\{ S \to ABB \mid BAB \mid BBA \mid e$$
$$A \to AS \mid SA \mid a$$
$$B \to BS \mid SB \mid b \}, S)$$

[β] $G_2 = (\{S, a, b, (,), \cup, *, \emptyset\}, \{a, b, (,), \cup, *,$

$\{S \to (SS) \mid (S \cup S) \mid S^* \mid a \mid b \mid \emptyset$

S

$)$

[γ] $G_3 = (\{S, a, b\}, \{a, b\},$
$\{S \rightarrow aSb \mid aaSb \mid e\}, S)$

[δ] $L_4 = \{ a^m b^n c^p d^q : m+n = p+q \}$

$G_4 = (\{ S, X, Y, Z, a, b, c, d \}, \{ a, b, c, d \},$

$\{ S \to a S d \mid X \mid Y \mid Z$

$X \to a X c \mid Z$

$Y \to b Y d \mid Z$

$Z \to b Z c \mid e \}, S$

ΑΣΚΗΣΗ 2

[β] $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \Delta_1, S_1, F_1)$

$K_1 = \{1, 2\}$

$\Sigma_1 = \{a, b\}$

$\Gamma_1 = \{a, b\}$

$S_1 = 1$

$F_1 = \{2\}$

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \{ & ((1, a, e), (1, a)), \\ & ((1, b, e), (1, b)), \\ & ((1, e, e), (2, e)), \\ & ((1, a, e), (2, e)), \\ & ((1, b, e), (2, e)), \\ & ((2, a, a), (2, e)), \\ & ((2, b, b), (2, e))\}\end{aligned}$$

Απόδειξη ορθότητας : μέ επαγωγή (παραλείπεται)

[α] Η γλώσσα παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα : $G_2 = (\{S, a, b\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb \mid aSbb \mid e\}, S\}$

Μετατρέπουμε τήν παραπάνω γραμματική σέ αυτόματο μέ στοίβα M_3 όπως στό Θεώρημα πού δείχνει ότι κάθε γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο μέ στοίβα :

$M_2 = (K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \Delta_2, S_2, F_2)$

$K_2 = \{p, q\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$

$\Gamma_2 = \{S, a, b\}$

$S_2 = p$

$F_2 = \{q\}$

$\Delta_2 = \{((p, e, e), (q, S)),$
$((q, e, S), (q, aSb)),$
$((q, e, S), (q, aSbb)),$
$((q, e, S), (q, e)),$
$((q, a, a), (q, e)),$
$((q, b, b), (q, e))$
$\}$

Η ὀρθότητα ἕπεται ἀπό τό ὅτι τό M_2 κατασκευάστηκε ὅπως στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τό ὁποῖο ἐγγυᾶται ὅτι $L(M_2) = L(G_2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

[α] $L_1 = \{a^m b^n c^p : m = n \text{ ή } n = p \text{ ή } m = p\}$

Προσέξτε ότι:

$L_1 = \{a^m b^m c^p : m \geq 0, p \geq 0\}$
$\cup \{a^m b^n c^n : m \geq 0, n \geq 0\}$
$\cup \{a^m b^n c^m : m \geq 0, n \geq 0\}$

- Έστω $L_{11} = \{a^m b^m c^p : m \geq 0, p \geq 0\}$
Η L_{11} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα:
$G_{11} = (\{S, T, C, a, b, c\}, \{a, b, c\},$
$\{S \to TC, T \to aTb \mid e, C \to c \mid e\}, S)$

- Έστω $L_{12} = \{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$
Η L_{12} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα:
$G_{12} = (\{S, T, A, a, b, c\}, \{a, b, c\},$
$\{S \to AT, A \to a \mid e, T \to bTc \mid e\}, S)$

- Έστω $L_{13} = \{a^m b^n c^m : m \geq 0, n \geq 0\}$
Η L_{13} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα:
$G_{13} = (\{S, T, a, b, c\}, \{a, b, c\},$
$\{S \to aSc \mid T, T \to bT \mid e\}, S)$

Αφού $L_1 = L_{11} \cup L_{12} \cup L_{13}$, και το σύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστό κάτω από την πράξη της ένωσης, έπεται ότι η L_1 είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

[β] $L_2 = \{ a^m b^n c^p : m \neq n$ ή $n \neq p$ ή $m \neq p \}$
(Προσέξτε τυπογραφικό λάθος.)

$L_2 = \{ a^m b^n c^p : m < n$ ή $m > n$ ή $n < p$ ή $n > p$
ή $m < p$ ή $m > p \}$

$$
\begin{aligned}
L_2 = \ & \{ a^m b^n c^p : m < n \} \ \cup \\
& \{ a^m b^n c^p : m > n \} \ \cup \\
& \{ a^m b^n c^p : n < p \} \ \cup \\
& \{ a^m b^n c^p : n > p \} \ \cup \\
& \{ a^m b^n c^p : m < p \} \ \cup \\
& \{ a^m b^n c^p : m > p \}
\end{aligned}
$$

Η γλώσσα $\{ a^m b^n c^p : m < n \}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα ($\{S, T, U, C, a, b, c\}, \{a, b, c\},$
$\{ S \to TC, \ T \to Tb \mid U, \ U \to aUb \mid e,$
$C \to c \mid e \}, S)$

Όμοια, μπορούμε να βρούμε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για κάθε μιά από τις υπόλοιπες 5 γλώσσες.

Αφού το σύνολο των ΓΧΣ είναι κλειστό κάτω από την πράξη της ένωσης, έπεται ότι η L_2 είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

[γ] Τό κανονικό παράδειγμα γιά γλώσσα πού δέν είναι χωρίς συμφραζόμενα.

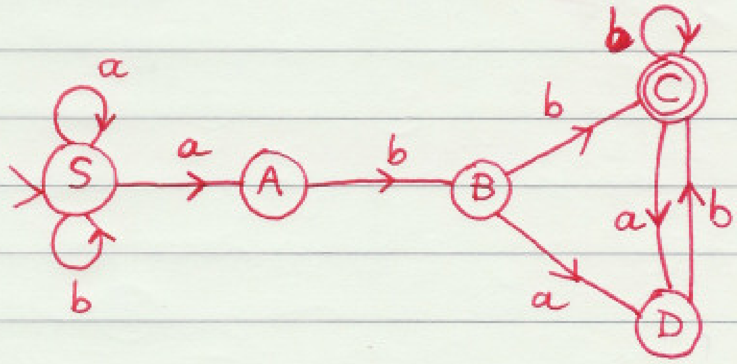
ΑΣΚΗΣΗ 5

Μιά προσεκτική παρατήρηση τῶν κανόνων τῆς γραμματικῆς δείχνει ὅτι:

- τό (μή τελικό) σύμβολο A "ὁδηγεῖ" σέ λέξεις πού ἀνήκουν στή γλώσσα $L((a \cup b)^*)$
- τό (μή τελικό) σύμβολο B "ὁδηγεῖ" σέ λέξεις πού ἀνήκουν στή γλώσσα $L((((ab) \cup b)^*((ab) \cup b)))$
- τό (ἀρχικό) σύμβολο S ὁδηγεῖ σέ λέξεις πού εἶναι συμπτήξεις:
  - μιᾶς λέξης πού παράγεται ἀπό τό σύμβολο A
  - μιᾶς λέξης ab
  - μιᾶς λέξης πού παράγεται ἀπό τό σύμβολο B

Κανονική ἔκφραση: $(((a \cup b)^*(ab))(((ab) \cup b)^*((ab) \cup b)))$

Μή ντετερμινιστικό πεπερασμένο αὐτόματο:



Κανονική γραμματική:

$$
\begin{aligned}
S &\to aS \mid bS \mid aA \\
A &\to bB \\
B &\to bC \mid aD \\
C &\to aD \mid bC \mid e \\
D &\to bC
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

[α] $L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* : \#_b(w) = (\#_a(w))^2 \}$

Ὑποθέτουμε, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ L_1 εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Ἀπό τό θεώρημα ἄντλησης γιά γλῶσσες χωρίς συμφραζόμενα, ὑπάρχει κάποιος ἀκέραιος $K > 0$ τέτοιος ὥστε κάθε λέξη $w \in L_1$ μέ μῆκος $|w| > K$ μπορεῖ νά γραφεῖ σάν $w = uvxyz$ ὅπου:

(i) $|vy| > 0$

(ii) $|vxy| \leq K$

(iii) $uv^m xy^m z \in L_1$ γιά κάθε ἀκέραιο $m \geq 0$.

Διαλέγουμε $w = a^K b^{K^2}$, ἔτσι ὥστε οἱ προϋποθέσεις ($|w| > K$) τοῦ θ. ἄντλησης νά ἰσχύουν.

Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

$\underbrace{aa \ldots a}_{vxy} bb \ldots b$ • Τά v καί y περιέχουν μόνο a.
Ἀπό θ. ἄντλησης, ἡ λέξη $w' = uv^2xy^2z \in L_1$.
Προσέξτε ὅτι: $\#_a(w') = \#_a(w) + |v| + |y| > K$, ἀφοῦ $|vy| > 0$, ἐνῶ $\#_b(w') = \#_b(w) = K^2$.
Ἀντίφαση.

$aa \ldots a\underbrace{bb \ldots}_{vxy} b$ • Τά v καί y περιέχουν μόνο b.
Ἀπό θ. ἄντλησης, ἡ λέξη $w' = uv^2xy^2z \in L_1$.
Προσέξτε ὅτι: $\#_a(w') = \#_a(w) = K$, ἐνῶ $\#_b(w') = \#_b(w) + |v| + |y| > K^2$ ἀφοῦ $|vy| > 0$.
Ἀντίφαση.

$\underbrace{aa\ldots abb\ldots b}_{vxy}$

- Τά v καί y περιέχουν a καί b. (Ἀκριβέστερα, ἡ λέξη $|vxy|$ περιέχει a καί b.) Ἀπό θ. ἄντλησης, ἡ λέξη $w' = uv^0xy^0z \in L_1$.

Θά ἔχουμε:

$$\#_a(w') = \#_a(w) - \#_a(vy) = K - \#_a(vy)$$
$$\#_b(w') = \#_b(w) - \#_b(vy) = K^2 - \#_b(vy)$$

ὅπου:

$$\#_a(vy) + \#_b(vy) = |vy| \leq K$$

Διακρίνουμε δύο ὑποπεριπτώσεις:

(i) $\#_a(vy) = 0$

Τότε, ἀφοῦ $|vy| > 0$, θά εἶναι $\#_b(vy) > 0$, ὁπότε $\#_b(w') < K^2$ ἐνῶ $\#_a(w') = \#_a(w) = K$.

Ἀντίφαση.

(ii) $\#_a(vy) > 0$

Τότε, ἀφοῦ $|vy| \leq K$, $\#_b(vy) \leq K-1$.

Ἀφοῦ $w' \in L_1$,

$$(K - \#_a(vy))^2 = K^2 - \#_b(vy)$$

Ἔχουμε:

$$(K - \#_a(vy))^2 \leq (K-1)^2$$

ἐνῶ:

$$K^2 - \#_b(vy) \geq K^2 - (K-1) = K^2 - K + 1$$

Ἀφοῦ $K > 0$, $(K-1)^2 < K^2 - K + 1$ (ἐπαληθεῦστε το!).

Ἕπεται ὅτι $(K - \#_a(vy))^2 < K^2 - \#_b(vy)$.

Ἀντίφαση.

[β] $L_2 = \{ a^i b^{2i} a^i \ : \ i \geq 0 \}$

Ὑποθέτουμε, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ L_2 εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Ἀπό τό Θ. ἄντλησης γιά γλῶσσες χωρίς συμφραζόμενα, ὑπάρχει κάποιος ἀκέραιος $K > 0$ τέτοιος ὥστε κάθε λέξη $w \in L_2$ μέ μῆκος $|w| > K$ μπορεῖ νά γραφεῖ σάν $w = uvxyz$ ὅπου:

(i) $|vy| > 0$

(ii) $|vxy| \leq K$

(iii) $uv^m x y^m z \in L_2$ γιά κάθε ἀκέραιο $m \geq 0$.

Διαλέγουμε $w = a^K b^{2K} a^K$, ἔτσι ὥστε οἱ προϋποθέσεις $(|w| > K)$ τοῦ Θ. ἄντλησης νά ἰσχύουν. Γράφουμε συμβολικά: $w = \underbrace{a^K}_{A} \underbrace{b^{2K}}_{B} \underbrace{a^K}_{C}$

Διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις, καί θεωροῦμε σέ κάθε μιά ἀπό αὐτές τίς περιπτώσεις τή λέξη $w' = uv^2xy^2z \in L_2$.

1. Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο a ἀπό τήν ὁμάδα A. Τότε, ὁ ἀριθμός τῶν a πρίν ἀπό τά b στή w' εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K (ἀφοῦ $|vy| > 0$), ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν b στήν w' διατηρεῖται σέ $2K$. Ἀντίφαση.

2. Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο b ἀπό τήν ὁμάδα B. Τότε, ὁ ἀριθμός τῶν a στίς ὁμάδες A καί C διατηρεῖται σέ K στήν w', ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν b στήν w' (μεταξύ τῶν ὁμάδων ἀπό a) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό $2K$ (ἀφοῦ $|vy| > 0$). Ἀντίφαση.

(3) Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο a ἀπό τήν ὁμάδα C. Τότε, ὁ ἀριθμός τῶν a μετά ἀπό τά b στή λέξη w' εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K (ἀφοῦ $|vy| > 0$), ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν b στήν ὁμάδα B στή λέξη w' διατηρεῖται σέ 2K. Ἀντίφαση.

(4) Ἡ λέξη vxy περιέχει a ἀπό τήν ὁμάδα A καί b ἀπό τήν ὁμάδα B. Τότε, στή w' ὁ ἀριθμός τῶν ~~A~~ a στήν ὁμάδα A εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K, ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν a στήν ὁμάδα C διατηρεῖται σέ K. Ἀντίφαση.

(5) Ἡ λέξη vxy περιέχει b ἀπό τήν ὁμάδα B καί a ἀπό τήν ὁμάδα C. Τότε, στή w' ὁ ἀριθμός τῶν a στήν ὁμάδα C εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K, ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν a στήν ὁμάδα A διατηρεῖται σέ K. Ἀντίφαση.

Προσέξτε ὅτι οἱ περιπτώσεις (1) ἕως (5) ἐξαντλοῦν ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις: ἀφοῦ $|vxy| \leq K$, τό vxy δέν μπορεῖ νά καλύπτει καί τίς τρεῖς ὁμάδες διότι τότε θά εἶχε μῆκος $\geq 2K+2$.