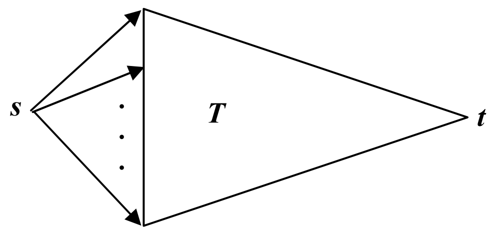
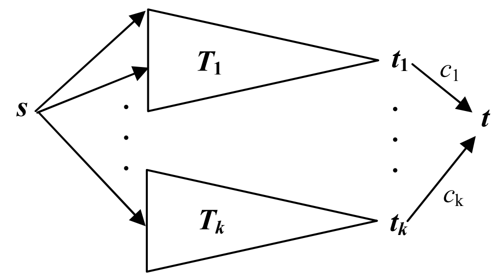
Κατ'οίκον Εργασία 3 – Σκελετοί Λύσεων

1. Έστω ένα δίκτυο ροής στο οποίο αφαίρεση της πηγής δίνει ένα δένδρο με ρίζα τον κόμβο προορισμού του δικτύου, όπως φαίνεται στο σχήμα (α).



(α)



(β)

Ας γράψουμε *flow*(s, T, t) για την τιμή της μέγιστης ροής που μπορεί να περάσει από την κορυφή s στην κορυφή t μέσω του δένδρου T. Από την αναδρομική δομή ενός δένδρου παρατηρούμε ότι

$$flow(s, T, t) = \min(c_1,\ flow(s, T_1, t_1)) + \ldots + \min(c_k,\ flow(s, T_k, \tau_k))$$

(Δες σχήμα (β)). Αυτό μας οδηγεί στον πιο κάτω αναδρομικό αλγόριθμο για εύρεση της τιμής της μέγιστης ροής του δικτύου.

```
maxflowval(V, E, s, t){
   val = 0;
   for all (u,t)∈E
         if u == s
               val =+ c[u,t];
         else
               g = maxflowval(V, E, s, u);
               val =+ min(c[u,t], g);
   return val;
}
```

Για υπολογισμό μίας μέγιστης ροής, ο αλγόριθμος ακολουθεί δύο φάσεις:

- στην πρώτη φάση, υπολογίζει για κάθε ακμή (u,v) τη μέγιστη ποσότητα ροής, a(u,v) που μπορεί να φθάσει στην κορυφή u και να προωθηθεί μέσω της ακμής, ενώ
- στη δεύτερη φάση, υπολογίζει για κάθε ακμή (u,v) το μέρος της ροής a(u,v), το f(u,v), που μπορεί να προωθηθεί μέχρι και τον προορισμό του δικτύου.

```
maxflow(V, E, s, t){
   int static a[V,V];
   val = compute1(V, E, s, t);
   computeflow(V, E, s, t, val);
}
```

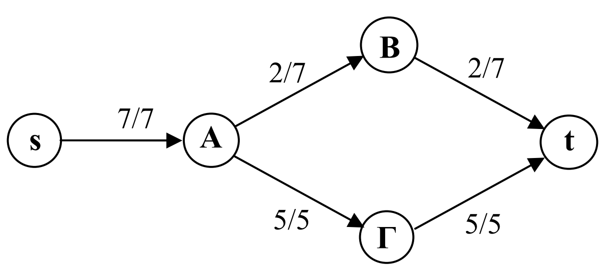
```
compute1(V, E, s, t){
   val = 0;
   for all (u,t)∈E
        if u == s
             a[u,t] = c[u,t];
             val =+ c[u,t];
        else
             g = compute1 (V, E, s, u);
             a[u,t] = min(c[u,t], g);
             val =+ a[u,t];
   return val;
}

computeflow(V, E, s, t, val){
   for all (u,t)∈E
        if u == s
             f(u,t) = val;
        else
             f(u,t) = min(a[u,t], val);
             computeflow(V, E, s, u, f(u,t));
             val =- f(u,t);
   return f;
}
```

Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι της τάξης O(E).

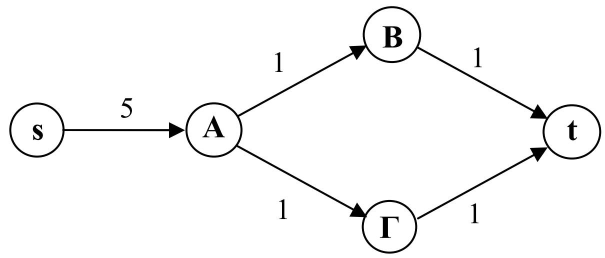
2. (i) Η πρόταση είναι ορθή. Είναι προφανές ότι εξαγωγή της ακμής δεν θα επηρεάσει την τιμή της ροής αφού από αυτή περνά μηδενική ποσότητα ροής.

   (ii) Η πρόταση είναι λανθασμένη όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Συγκεκριμένα, αφαίρεση μίας εκ των ακμών (Α, Β) και (Β,t), οι οποίες φέρουν την ελάχιστη ροή από τις υπόλοιπες ακμές του δικτύου στο παράδειγμα, οδηγεί σε δίκτυα όπου η μέγιστη ροή έχει τιμή 5. Εντούτοις, αφαίρεση μίας εκ των (Α, Γ) και (Γ, t) οδηγεί σε δίκτυα όπου η μέγιστη ροή έχει τιμή 7. Επομένως, οι (Α, Β) και (Β,t) δεν είναι ακμές ελάχιστης σημασίας.

(iii) Η πρόταση είναι λανθασμένη όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Συγκεκριμένα, οι ακμές (Α, Β), (Α, Γ), (Β, t) και (Γ,t), βρίσκονται κατά μήκος κάποιας τομής ελάχιστης χωρητικότητας. Εντούτοις, αποτελούν ακμές ελάχιστης σημασίας, αφού αφαίρεση μίας από αυτές οδηγεί σε μείωση της τιμής της μέγιστης ροής κατά 1, ενώ αφαίρεση της s οδηγεί σε μείωση της τιμής της μέγιστης ροής κατά 5.

3. Θέλουμε να περιγράψουμε τα δεδομένα ως κάποιο δίκτυο ροής με τέτοιο τρόπο ώστε το πρόβλημα να μπορεί να λυθεί με κατάλληλη χρήση ενός αλγόριθμου μέγιστης ροής.

Προσπάθεια 1:

Θέτουμε το σύνολο κορυφών το δικτύου να είναι το σύνολο

$$V = \{s, t\} \cup \{(i, j) | \ 1 \leq i, j \leq n\},$$

δηλαδή, θεωρούμε μια κορυφή για κάθε τετράγωνο της σχάρας και δύο επιπλέον κορυφές, τις s (η πηγή) και t (ο προορισμός).

Ακμές του δικτύου είναι το σύνολο

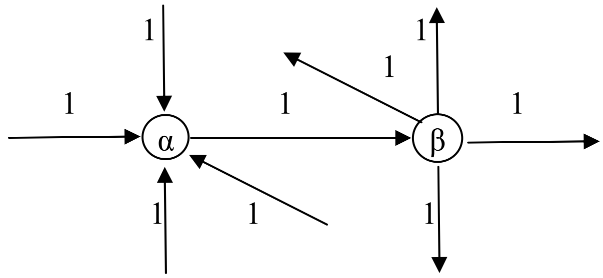
$E = \{(s, (i, j))$ | υπάρχει πιόνι στο τετράγωνο (i,j) της σχάρας$\}$
$\cup \{((i, j), t) \mid i$ ή $j \in \{1, n\}\}$
$\cup \{(a,b) \mid$ τα τετράγωνα a και b είναι γειτονικά$\}$

Θέτουμε τη χωρητικότητα κάθε ακμής e να είναι $c(e)=1$. Σε αυτό το δίκτυο η διαδρομή ενός πιονιού από την αρχική του θέση προς κάποιο οριακό τετράγωνο μεταφράζεται ως το πέρασμα μιας μονάδας ροής από την κορυφή που συμβολίζει την αρχική θέση προς τον προορισμό.

Το πιο πάνω δίκτυο δεν περιγράφει πλήρως το πρόβλημα μας. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν λαμβάνει υπόψη τον περιορισμό ότι μπορούμε να περάσουμε από ένα τετράγωνο το πολύ μια φορά.

Προσπάθεια 2

Τροποποιούμε το πιο πάνω δίκτυο ως εξής: Κάθε τετράγωνο συμβολίζεται ως τον συνδυασμό 2 κορυφών. Η πρώτη μπορεί να δεχθεί ροή από οποιοδήποτε από τα γειτονικά τετράγωνα αλλά επιτρέπει την προώθηση μόνο μιας μονάδας ροής στη δεύτερη κορυφή. Η δεύτερη κορυφή μπορεί να στείλει αυτή τη μία μονάδα σε οποιοδήποτε από τους γειτονές της.



Το σύνολο κορυφών του καινούριου δικτύου ορίζεται ως

$$V = \{s, t\} \cup \{(i, j, \alpha) \mid 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{(i, j, \beta) \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

δηλαδή, θεωρούμε δύο κορυφές για κάθε τετράγωνο της σχάρας, τις (i, j, α), (i, j, β), και δύο επιπλέον κορυφές, τις s (η πηγή) και t (ο προορισμός).

Ακμές του δικτύου είναι το σύνολο

$E = \{(s, (i, j, \alpha)) \mid$ υπάρχει πιόνι στο τετράγωνο (i, j) της σχάρας$\}$
$\cup \{((i, j, \beta), t) \mid i$ ή $j \in \{1, n\}\}$
$\cup \{((i, j, \alpha), (i, j, \beta))\}$
$\cup \{((i, j, \beta), (i', j', \alpha)) \mid$ τα τετράγωνα (i, j) και (i', j') είναι γειτονικά$\}$

Θέτουμε και πάλι τη χωρητικότητα κάθε ακμής e να είναι $c(e)=1$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα μπορεί να λυθεί τρέχοντας τον αλγόριθμο μέγιστης ροής στο πιο πάνω δίκτυο.

Θεώρημα:

Η τιμή της μέγιστης ροής του δικτύου είναι ίση με m αν και μόνο αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα.

Απόδειξη:

Αν η μέγιστη ροή του δικτύου είναι ίση με m τότε μπορούμε να μεταφράσουμε την κίνηση της ροής μέσα στο δίκτυο σε κίνηση του κάθε πιονιού πάνω στη σχάρα προς κάποιο οριακό τετράγωνο χωρίς διασταύρωση μονοπατιών, και αντίστροφα.